Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется **_противоположным_** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или **_модулем_** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется _нулевым вектором_ и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется _единичным_ вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется _ортом_ вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются **_коллинеарными_**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются **_равными_** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Равные векторы называют также _свободными_.

Три вектора в пространстве называются **_компланарными_**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

5.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

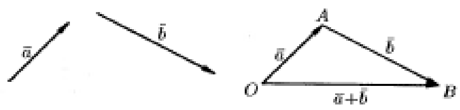
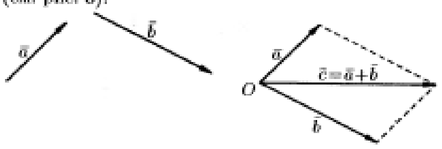


Рис. 2

Это правило сложения векторов называют _правилом треугольника_.
Сумму двух векторов можно построить также по _правилу параллелограмма_ (см. рис. 3).



Под _разностью_ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (см. рис. 5).

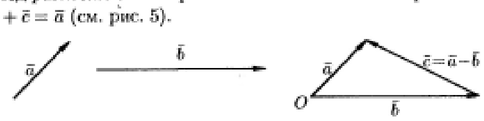
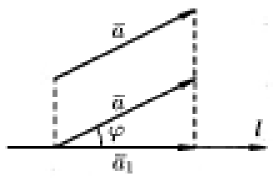


Рис. 5

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью (см. рис. 6).

Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda \cdot \bar{a}$ (или $\bar{a} \cdot \lambda$), который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Например, если дан вектор $\xrightarrow{\bar{a}}$, то векторы $3\bar{a}$ и $-2\bar{a}$ будут иметь вид $\xrightarrow{3\bar{a}}$ и $\xleftarrow{-2\bar{a}}$.



❑ Если $\varphi = (\widehat{\bar{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = +|\bar{a}_1| = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $(\varphi \leqslant \pi)$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = -|\bar{a}_1| = -|\bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$ (см. рис. 10).

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = 0 = |a| \cos\varphi$. ■

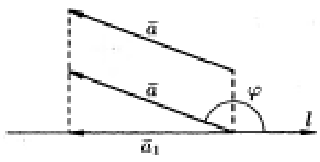
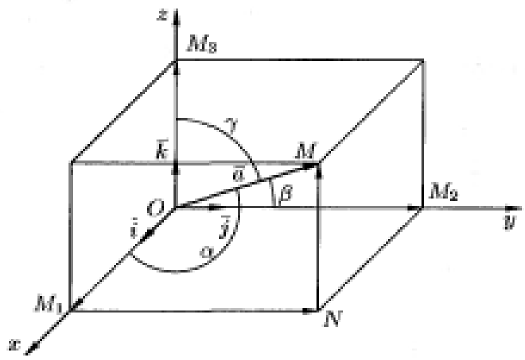


Рис. 10

Следствие 5.1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.

5.4. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (см. рис. 12).



Обозначим проекции вектора $\bar{a} = OM$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, т. е. $|\overline{OM_1}| = a_x$, $|\overline{OM_2}| = a_y$, $|\overline{OM_3}| = a_z$. Тогда из равенств (5.1) и (5.2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \tag{5.3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.***

Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (5.3) часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; z_z)$.

Равенство $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ означает, что $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$, т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{5.5}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$.

Подставим выражения (5.5) в равенство (5.4), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,}$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.***

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

§ 6. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

6.1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (или $(\bar{a}, \bar{b})$). Итак, по определению,

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,} \tag{6.1}$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

Формуле (6.1) можно придать иной вид. Так как $|\bar{a}| \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a}$, (см. рис. 14), а $|\bar{b}| \cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b}$, то получаем:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a},} \tag{6.2}$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

т. е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

6.2. Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

❑ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, а $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos(\widehat{\bar{b},\bar{a}})$. И так как $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}| = |\bar{b}|\cdot|\bar{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b},\bar{a}})$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

❑ $(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}|\cdot \text{пр}_{\bar{b}}\,\lambda\bar{a} = \lambda\cdot|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$. ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

❑ $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{a}|\cdot(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{c}) = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} + |\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{c} =$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

❑ $\bar{a}^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0 = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}| = |\bar{a}|^2$. ■

В частности: $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т. е. $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример 6.1. Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

❍ Решение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(3\bar{a}-4\bar{b})^2} = \sqrt{9\bar{a}^2 - 24\bar{a}\bar{b} + 16\bar{b}^2} =$$
$$= \sqrt{9\cdot 4 - 24\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \quad ●$$

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\perp\bar{b} \iff a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (см. рис. 15).

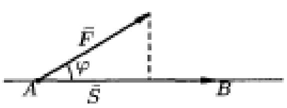


Рис. 15

Из физики известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

$$A = F\cdot S\cdot\cos\varphi \quad \text{т. е.} \quad A = \bar{F}\cdot\bar{S}.$$

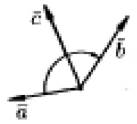
Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

§ 7. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

7.1. Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (см. рис. 16).

правая тройка,



левая тройка

Рис. 16

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

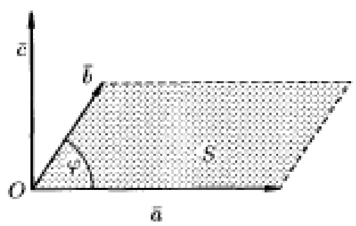


Рис. 17

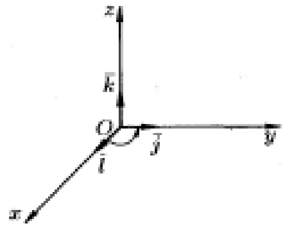


Рис. 18

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}},$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}.$$

7.2. Свойства векторного произведения

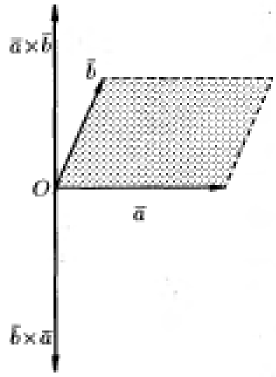


Рис. 19

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$ (см. рис. 19).

❑ Векторы $\bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{b}\times\bar{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a}\times\bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b}\times\bar{a}$ противоположной ориентации). Стало быть, $\bar{a}\times\bar{b} = -(\bar{b}\times\bar{a})$. ■

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\lambda(\bar{a}\times\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times(\lambda\bar{b})$.

3. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\bar{a}\parallel\bar{b} \iff \bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$.

❑ Если $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то угол между ними равен $0°$ или $180°$. Но тогда $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$. Значит, $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$.

Если же $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$, то $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi = 0$. Но тогда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, т. е. $\bar{a}\parallel\bar{b}$. ■

В частности, $\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = \bar{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}.$$

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. И, значит, $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и пусть O — некоторая точка пространства (см. рис. 20).

Из физики известно, что *моментом силы* $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\overline{M}| = |\bar{F}| \cdot ON = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\varphi = |\bar{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin(\widehat{\bar{F}, \overline{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Стало быть, $\overline{M} = \overline{OA} \times \bar{F}$.

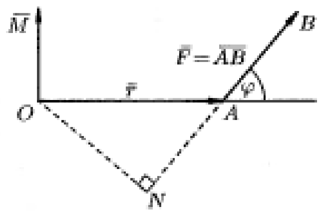


Рис. 20

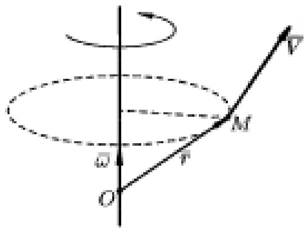


Рис. 21

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{v}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{OM}$, где O — некоторая неподвижная точка оси (см. рис. 21).

§ 8. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

8.1. Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (см. рис. 22).

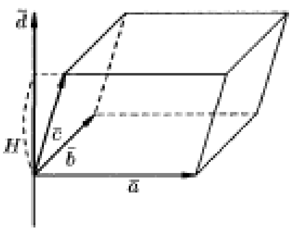


Рис. 22

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\,\bar{c}$, $|\bar{d}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\,\bar{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\bar{d}}\,\bar{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = S \cdot (\pm H)$, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

8.2. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 8.1. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

❍ Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-1;-3;-2), \quad \bar{b} = \overline{AC} = (1;3;-1), \quad \bar{c} = \overline{AD} = (2;-2;-5).$$

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$. ●